

Prinzip bei der Integraldefinition:

λ -messbare Funktionen $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

mit $\boxed{f = g}$ λ -f.ü. sollen - wenn existent - dasselbe Integral haben.

(vgl. (8) von Satz 25.3)

Satz 25.2: Sei λ ein Maß auf X ,

$f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seien λ -messbar.

(o) f λ -integrierbare Treppenfkt.

(vgl. Def. 25.2) $\Rightarrow$

$$\int f d\lambda =^* \int f d\lambda$$

*

(= dem Integral aus Def. 25.2)

Also f int'bar im Sinne von Def 25.3
iii)

$$(1) \quad f \leq g \quad \lambda\text{-f.ü.} \implies$$

$$\int^* f d\lambda \leq \int^* g d\lambda, \quad \int^* f d\lambda \leq \int^* g d\lambda$$

(Monotonie)

$\Downarrow$

$$(2) \quad f \geq 0 \quad \lambda\text{-f.ü.} \implies \int^* f d\lambda, \int^* f d\lambda \geq 0$$

$$(3) \quad \int^* f d\lambda < \infty \implies \int^* f^+ d\lambda < \infty$$

und $f(x) < \infty$ für λ -f.a. $x \in X$

$$(4) \quad \text{für } 0 \leq c < \infty \text{ ist}$$

$$\int^* (cf) d\lambda = c \int^* f d\lambda$$

$$(5) \quad \int^* f d\lambda + \int^* g d\lambda \text{ kein } \\ \text{undefinierter Ausdruck} \implies$$

$$*\int (f+g) d\lambda \leq *\int f d\lambda + *\int g d\lambda$$

$$(6) \quad \boxed{*\int f d\lambda = -*\int (-f) d\lambda}$$

$$(7) \quad *\int f d\lambda \leq *\int f d\lambda$$

Beweis: klar! (Beweis von (6) auf
p. 303^a, (5) 303^b)

Satz 25.3 : Kriterien für Integrierbarkeit

Sei λ ein Maß auf X , $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
seien λ -messbar. Dann gilt:

$$(1) \quad f \geq 0 \quad \lambda\text{-f.ü.} \implies$$

f λ -integrierbar mit

$$\int_X f d\lambda \in [0, \infty]$$

Beweis von (o): Sei etwa

$$f = \chi_A$$

für $A \in \mathcal{M}_\lambda$. Dann

$$\int^* f d\lambda = \sup \left\{ \int f d\lambda : f \in \mathcal{I}, \right. \\ \left. f \leq \chi - f \cdot \text{ü.} \right\}$$

$\gg$ Treppenfunkten Integral von f

$$(f = \chi) = \lambda(A)$$

und analog $\int^* f d\lambda = \inf \{ \dots \}$

$$\leq \text{Treppenfunktionenintegral von } f = \lambda(A)$$

$$\Rightarrow \int^* f d\lambda = \lambda(A) = \int f d\lambda$$



Beweis von (5):

-303^b-

Wähle $\pm(f), \pm(g) \in \mathcal{T}$ mit

$$\pm(f) \gg f, \quad \pm(g) \gg g$$

und

$$\int \pm(f) d\lambda \leq \overset{*}{\int} f d\lambda + \varepsilon,$$

$$\int \pm(g) d\lambda \leq \overset{*}{\int} g d\lambda + \varepsilon$$

$\Rightarrow \pm := \pm(f) + \pm(g) \in \mathcal{T}$ mit

$$\pm \gg f + g$$

$$\Rightarrow \overset{*}{\int} (f+g) d\lambda \leq \int \pm d\lambda =$$

$$\int \pm(f) d\lambda + \int \pm(g) d\lambda \leq$$

$$\overset{*}{\int} f d\lambda + \overset{*}{\int} g d\lambda + 2\varepsilon$$



(2) f λ -integrierbar $\implies$

cf λ -integrierbar für jedes $c \in \mathbb{R}$

mit $\int_X cf \, d\lambda = c \int_X f \, d\lambda$

[Konvention: $0 \cdot \infty = 0$!]

(3) f, g λ -integrierbar,

$\int_X f \, d\lambda + \int_X g \, d\lambda$ kein undefinierter

Ausdruck $\implies f+g$ λ -inte-

grierbar mit

$$\int_X (f+g) \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda + \int_X g \, d\lambda$$

speziell:

f, g summierbar $\implies$

$f+g$ summierbar

(4) f, g λ -integrierbar mit

$$f \leq g \quad \lambda\text{-f.ü.} \implies$$

$$\int f d\lambda \leq \int g d\lambda$$

$$(5) \quad f \quad \lambda\text{-integrierbar} \iff$$

$$f^+ \text{ oder } f^- \quad \lambda\text{-summierbar}$$

$$(6) \quad f \quad \lambda\text{-integrierbar} \implies$$

$$|\int f d\lambda| \leq \int |f| d\lambda$$

(7)

$$f \quad \lambda\text{-summierbar} \iff$$

$$|f| \quad \lambda\text{-summierbar}$$



$$(8) \quad \text{Sei } f = g \quad \lambda\text{-f.ü.} \quad \text{Dann gilt:}$$

$$f \text{ integrierbar (summierbar)} \iff$$

$$g \quad \text{---//---} \quad \left(\begin{array}{l} \text{mit gleichem} \\ \lambda\text{-Integral} \end{array} \right)$$

Beweis: (1) Sei $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

λ -messbare Funktion ≥ 0 λ -f.ü.

Nach Def. 25.3, ii), ist zu zeigen:

$$\int^* f d\lambda = \int_* f d\lambda \quad (+)$$

Fall 1: $\lambda(\underbrace{\{x \in X: f(x) = +\infty\}}_{=: A}) > 0$

offenbar $A \in \mathcal{M}_\lambda$; für $n \in \mathbb{N}$

ist

$$h := n \chi_A$$

λ -T.F. mit $h \leq f \implies$ Def. 25.3, ii)

$$\int h d\lambda \leq \int_* f d\lambda \quad (\text{Unterintegral})$$

$$\Rightarrow n \lambda(A) \leq \int_* f d\lambda$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} + \infty = \int_* f d\lambda$$

Wegen $\int_* \dots \leq \int_* \dots$ folgt $\oplus$.

Fall 2: $\lambda(A) = 0$.

Sei $t > 1$. Dann ist

$$\{x \in X : f(x) > 0\} =$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\{x \in X : t^n \leq f(x) < t^{n+1}\}}_{=: A_n}$$

mit disjunkten Mengen A_n .

Setze $g: X \rightarrow [0, \infty)$,

$$g(x) := \begin{cases} t^n, & x \in A_n \text{ für ein } n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \text{ Treppenfkt.} \leq f$$

$$\Rightarrow \int g d\lambda \leq \int_* f d\lambda;$$

Auch $h := t \cdot g$ ist T. F. mit

$$f \leq h \quad \text{f.ü.} \quad (\text{Satz 25.1})$$

$$\Rightarrow \int_* f d\lambda \leq \int h d\lambda =$$

$$t \int g d\lambda \stackrel{\text{n.o.}}{\leq} t \int_* f d\lambda$$

Mit $t \downarrow 1$ folgt $\textcircled{+}$. Rest $\leadsto$ vgl. Skript

Jetzt zeigen wir:

- das Integral von Regelfunktionen ist das $\mathcal{L}^1$ -Integral

- $\mathcal{L}^1$ -Integration ist allgemeiner, da $\chi_{\mathbb{Q}}$ keine Regelfkt ist, aber $\mathcal{L}^1$ -Integral 0 hat.

Satz 25.4 :

i) Sei $[a, b]$ kompaktes Intervall
und $f \in \mathcal{R}([a, b])$ (Regelfunktionen)
Dann ist $\chi_{[a, b]} \cdot f$ $\mathcal{L}^1$ -
messbar.

ii) Für $f \in \mathcal{R}([a, b])$

ist $\chi_{[a, b]} \cdot f$ $\mathcal{L}^1$ -summierbar

bar mit

$$\int \chi_{[a, b]} f \, d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) dx$$

Beweisskizze (Details $\leadsto$ Übung):

Satz 12.3

$f \in \mathcal{R}([a, b])$

$\implies$

Folgerung

$\exists f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n \xrightarrow{\quad} f$

auf $[a, b]$, jedes f_n ist

eine "spezielle" Treppenfunktion

im Sinne von Def. 12.1

(nur endlich viele Werte auf disjunkten Intervallen)

"Zeige:" $\chi_{[a,b]} \mathcal{I}_n$ ist $\mathcal{L}^1$ -messbar.

Aus $\chi_{[a,b]} \mathcal{I}_n \implies \chi_{[a,b]} \neq$

folgt dann i).

ad ii): Zitiere Satz 12.7:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$

mit

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(z_k) (x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

mit Feinheit $< \delta$ und jede Wahl
von Zwischenstellen $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Weiteres Vorgehen: konstruiere
durch passende Wahl von z_k Treppen-
funktionen $\leq f$ (bzw. $\geq f$) $\implies$

$$\int_{*}^{\infty} \chi_{[a,b]} f \, d\mathcal{L}^1 \geq$$

$$\sum f(z_k) (x_k - x_{k-1}) \geq \text{p.o.}$$

$$\int_a^b f(x) \, dx - \varepsilon$$

und entsprechend

$$* \int \chi_{[a,b]} f d\mathcal{L}^1 \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int \dots d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) dx = \int_* \dots d\mathcal{L}^1 \\ & \varepsilon \rightarrow 0 \quad \square \end{aligned}$$

Notation: Sei λ ein Maß auf X

und $A \in \mathcal{M}_\lambda$.

Zeige: $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist
 $\lambda \ll A$ messbar genau dann,
 $\chi_A f$ λ -messbar
 wenn ist.

Für solche $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei

$$\int_A f d\lambda := \int \chi_A f d\lambda,$$

vorausgesetzt das Integral rechts existiert in $\overline{\mathbb{R}}$.

Teil ii) von Satz 25.4 lautet also:

$$\int_{[a,b]} f d\lambda^1 = \int_a^b f(x) dx$$

für $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Links schreibt man oft auch

$$\int_a^b f(x) d\lambda^1(x).$$